PART3　不等式を満たす定数の値の範囲

3　$x \geqq 0$ において，つねに不等式 $x^3 - ax^2 + a^2 \geqq 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

不等式 $f(x) \geqq 0$ がつねに成立 $\Longleftrightarrow$ (関数 $f(x)$ の最小値) $\geqq 0$

第 16 講　PART3　確認問題

1　$x \geqq 0$ において，つねに不等式 $2x^3-3ax^2+a+6>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

ア

① $a<0$　② $a \leqq 0$

③ $a<2$　④ $a \leqq 2$

⑤ $a>-6$　⑥ $a \geqq -6$

⑦ $-6<a<0$　⑧ $-6 \leqq a \leqq 0$

⑨ $-6<a<2$　⑩ $-6 \leqq a \leqq 2$

PART3　不等式を満たす定数の値の範囲

3　$x \geqq 0$ において，つねに不等式 $x^3-ax^2+a^2 \geqq 0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^3-ax^2+a^2$ とおく。

$x \geqq 0$ において，つねに不等式 $x^3-ax^2+a^2 \geqq 0$ が成り立つのは，$x \geqq 0$ において

　$(f(x)$ の最小値$) \geqq 0$ ……①

のときである。

$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$　$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ \dfrac{2}{3}a$

$\dfrac{2}{3}a<0$　すなわち $a<0$ のとき

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	a^2	$\nearrow$

　$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=a^2$

　$a^2 \geqq 0$ であり，これはすべての実数 a で成り立ち，$f(0) \geqq 0$

　よって，$a<0$ のとき①は成り立つ。

$\dfrac{2}{3}a=0$　すなわち $a=0$ のとき

　$f'(x)=3x^2 \geqq 0$ より，$f(x)$ は単調増加であるから，

　$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=a^2=0$

　よって，$a=0$ のとき①は成り立つ。

$\dfrac{2}{3}a>0$　すなわち $a>0$ のとき

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	a^2	$\searrow$	$-\dfrac{4}{27}a^3+a^2$	$\nearrow$

　$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は右図となり，

　$f(x)$ の最小値は

$$f\left(\frac{2}{3}a\right)=\left(\frac{2}{3}a\right)^3-a\left(\frac{2}{3}a\right)^2+a^2=-\frac{4}{27}a^3+a^2$$

　したがって　$-\dfrac{4}{27}a^3+a^2 \geqq 0$　　$a^2\left(a-\dfrac{27}{4}\right) \leqq 0$

　$a^2>0$ であるから　$a-\dfrac{27}{4} \leqq 0$　　よって，$0<a \leqq \dfrac{27}{4}$ のとき①は成り立つ。

以上より，求める a の値の範囲は　$a \leqq \dfrac{27}{4}$

第16講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：⑨

[解説]

$f(x)=2x^3-3ax^2+a+6$ とおく。

$x \geqq 0$ において，つねに不等式 $2x^3-3ax^2+a+6>0$

が成り立つのは，$x \geqq 0$ において

$$(f(x) \text{ の最小値}) > 0 \quad \cdots\cdots (*)$$ [A]

のときである。

> [A]　$x \geqq 0$ において
> 不等式 $f(x)>0$ がつねに成立
> $\Longleftrightarrow$
> ($x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値) >0

$$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$$

より，$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ a$

(i)　$a<0$ のとき

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$a+6$	$\nearrow$

よって，$f(x)$ の最小値は　$f(0)=a+6$

(＊)より　$a+6>0$　すなわち　$a>-6$

$a<0$ より　$-6<a<0$

(ii)　$a=0$ のとき

$$f'(x)=6x^2 \geqq 0$$

より，$f(x)$ は単調増加するから，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は　$f(0)=a+6=6>0$

よって，(＊)は成り立つ。

(iii)　$a>0$ のとき

$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$a+6$	↘	極小 $-a^3+a+6$	↗

よって，$f(x)$ の最小値は　$f(a)=-a^3+a+6$

(＊)より　$-a^3+a+6>0$

すなわち　$(a-2)(a^2+2a+3)<0$

$a^2+2a+3=(a+1)^2+2>0$ より　$a-2<0$

すなわち　$a<2$

$a>0$ より　$0<a<2$

(i)～(iii)より，求める a の値の範囲は

$\boldsymbol{-6<a<2}$